04.03.2016

Νόμος Διαγραφής σε Ομάδες

Έστω $(G,*)$ μια ομάδα και $a,b,c \in G$

Τότε (α) $a*c=b*c \Rightarrow a=b$
(β) $a*b=a*c \Rightarrow b=c$

Απόδειξη:

(α) Έστω $a*c=b*c$
Έστω c' το αντίστροφο του c στην G και τότε
$(a*c)*c'=(b*c)*c' \Rightarrow a*(c*c')=b*(c*c')$
$\Rightarrow a*e=b*e \Rightarrow a=b$
Το (β) αποδεικνύεται παρόμοια.

Πρόταση: Έστω $(G,*)$ μια ομάδα. Τότε $\forall a,b \in G$, οι εξισώσεις: $a*x=b$ και $x*a=b$ έχουν μοναδική λύση στο σύνολο G.

Απόδειξη:
Έστω η εξίσωση $a*x=b$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει στοιχείο x το οποίο ικανοποιεί την $a*x=b$ και τότε αν a' είναι το αντίστροφο του a, θα έχουμε:
$a'*(a*x)=a'*b \Rightarrow (a'*a)*x=a'*b \Rightarrow e*x=a'*b$
$\Rightarrow x=a'*b$

Αντίστροφα $a*(a'*b)=(a*a')*b=e*b=b \Rightarrow$ το στοιχείο $a'*b$ είναι λύση της $a*x=b$, η οποία προφανώς είναι και μοναδική.

(34)

Παρόμοια το στοιχείο $b * a'$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $y * a = b$

• Έστω $(G, *)$ μια ομάδα, όπου $G = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι: $a_1 = e$

$*$	$a_1 = e$	$a_2 \dots$	$a_j \dots$	a_n
a_1	a_1	$a_2 \dots$	a_j	a_n
a_2	a_2	$a_2 * a_2$	$a_2 * a_j$	$a_2 * a_n$
$\vdots$	$\vdots$			
a_i	a_i		$\boxed{a_{ij} = a_i * a_j}$	
a_m	a_m			

Το στοιχείο στη θέση ij του πίνακα θα είναι $a_i * a_j = a_{ij}$

Ο πίνακας που σχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο καλείται: πίνακας Cayley της ομάδας G.

Κανόνες πίνακα Cayley:

1) Κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πίνακα Cayley μιας ομάδας, περιέχει τα στοιχεία της ομάδας, καθένα από τα οποία εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.
Αν το $a_k \in G$ εμφανίζεται σε μια στήλη, πχ στη στήλη j δύο φορές, τότε:

$$\exists\, i, m: \left.\begin{array}{l} a_i * a_j = a_k \\ a_m * a_j = a_k \end{array}\right\} \Rightarrow a_i * a_j = a_m * a_j$$

$$\xrightarrow[\text{Διαγραφής}]{\text{Νόμος}} a_i = a_m \Rightarrow \boxed{i = m}$$

2) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in G$

3) Η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική

<u>Αντίστροφα</u>: Αν $*$ μία πράξη επί ενός συνόλου G, έτσι ώστε να ισχύουν τα: 1, 2, 3, 4, τότε το ζεύγος $(G,*)$ είναι ομάδα.

Δύο ομάδες έχουν τις ίδιες ιδιότητες ⟺ έχουν ίδιο πίνακα Cayley

Η ομάδα $(G,*)$ είναι αβελιανή ⟺ ο πίνακας Cayley της ομάδας είναι συμμετρικός.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $(G,*)$ είναι ομάδα

1) $G=\{e\}$. Τότε ο πίνακας Cayley της G είναι:

$*$	e
e	e

$G=\{1\}$, ομάδα τάξης 1 (1 στοιχείο)

2) $G=\{e,a\}$ Τότε ο πίνακας Cayley της G είναι

ουδέτερο

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

$G=\{1,-1\}$: τάξης 2

36

3) $G = \{e, a, b\}$

Τότε ο πίνακας Cayley της G είναι:

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$(\mathbb{Z}_3, +)$, $(U_3, \cdot)$ } τάξης 3

ίδιος πίνακας Cayley, αλλά με άλλον συμβολισμό
$\Rightarrow$ οι ομάδες έχουν τις ίδιες ιδιότητες

(*) Όλες οι ομάδες με πλήθος ≤ 3 είναι αβελιανές διότι έχουν συμμετρικό πίνακα Cayley.

• $(\mathbb{Z}_3, +)$

+	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[0]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[1]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$
$[2]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$

• $(U_3, \cdot)$ $U_3 = \{z \in \mathbb{C} / z^3 = 1\} = \{1, w, w^2\}$, όπου
w: λύση της $z^2 + z + 1 = 0$
w^2: η άλλη λύση

$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $w^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

$\cdot$	1	w	w^2
1	1	w	w^2
w	w	w^2	1
w^2	w^2	1	w

$\mathbb{Z}_3 \longmapsto U_3$ (διατηρεί την πράξη)
$[0]_3 \longmapsto 1$
$[1]_3 \longmapsto w$
$[2]_3 \longmapsto w^2$

Αλλάζει μόνο ο συμβολισμός των στοιχείων στον πίνακα Cayley.

- $(\mathbb{Z}_4, +)$

$+$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[0]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[1]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$
$[2]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$
$[3]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$

- $(U_4, \cdot)$, $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Στοιχειώδεις Ιδιότητες Ομάδων

$(G, *)$: ομάδα

$\forall\, a \in G$: $a' = a^{-1}$ [και $* \mapsto \cdot$]

1) $\forall\, a, b \in G$: $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Γενικότερα $\forall\, a_1, \dots, a_n \in G$

$(a_1 * \dots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \dots * a_1^{-1}$

2) $(a^{-1})^{-1} = a$, $\forall\, a \in G$

38

3) $\begin{cases} a * a = a \Leftrightarrow a = e \\ a * b = a \Leftrightarrow b = e \\ a * b = b \Leftrightarrow a = e \end{cases}$

<u>Απόδειξη</u>

1) a) $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) = a*((b*b^{-1})*a^{-1})$
$= a*(e*a^{-1}) = a*a^{-1}$
$= e$

b) $(b^{-1}*a^{-1})*(a*b) = b^{-1}*((a^{-1}*a)*b)$
$= b^{-1}*(e*b) = b^{-1}*b$
$= e$

Τότε: Από τα a, b $\Rightarrow (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

2) $a*a^{-1} = e = a^{-1}*a \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

3) · αν $a = e$ τότε $e*e = e$
· αν $\cancel{a}*a = a = a*$ $\xrightarrow[\text{Διαγρ}]{\text{Νόμος}}$ $a = e$

· αν $b = e$, τότε: $a*b = a*e = a$.
· αν $\cancel{a}*b = a = \cancel{a}*e \Rightarrow b = e$

<u>Παρόμοια</u>: <u>$a*b = b \Leftrightarrow a = e$</u>

Βασικές Ιδιότητες Δυνάμεων σε Ομάδες

1) $(a^m)^{-1} = (a^{-1})^m = a^{-m}$

2) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad n, m \in \mathbb{Z}$

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

① $-(ma) = m(-a) = (-m)a$ Προσθετικός συμβολισμός

② $na + ma = (n+m)a$

③ $n(ma) = (n \cdot m)a$

Απόδειξη ...